

第3节 空间点、线、面的位置关系综合小题 (★★☆)

内容提要

本节题目解题的一般方法是根据题干的描述进行空间想象，画出图形，判断正误。画图的基本顺序是：先画面面，再画线面，最后添线；若较难想象，也可借助常见几何体（如正方体等）来辅助判断。

典型例题

【例1】设 α, β 为两个平面，则 $\alpha // \beta$ 的充要条件是（ ）

- (A) α 内有无数条直线与 β 平行 (B) α 内有两条相交直线与 β 平行
(C) α, β 平行于同一条直线 (D) α, β 垂直于同一平面

解析：由面面平行的判定定理可以得出B项正确，其余选项为什么错，我们画图来解释，

如图1， α 内有 a, b, c 等无数条平行线均与 β 平行，但 α 与 β 不平行，故A项错误；

如图2， α 和 β 都与直线 a 平行，但 α 与 β 不平行，故C项错误；

如图3， α 和 β 都与 γ 垂直，但 α 与 β 不平行，故D项错误。

答案：B

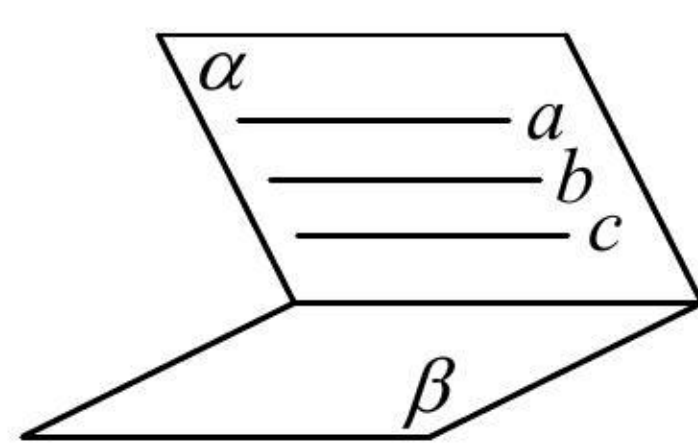


图1

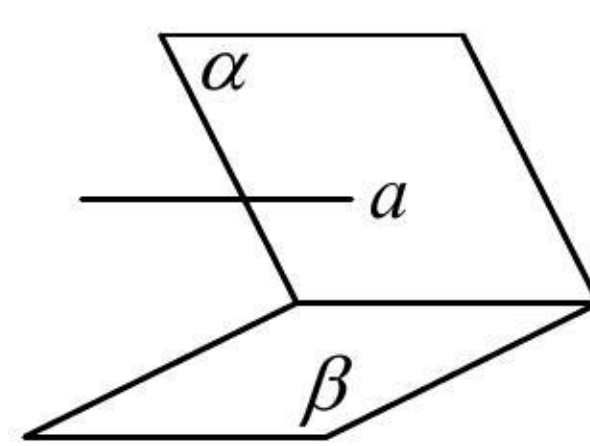


图2

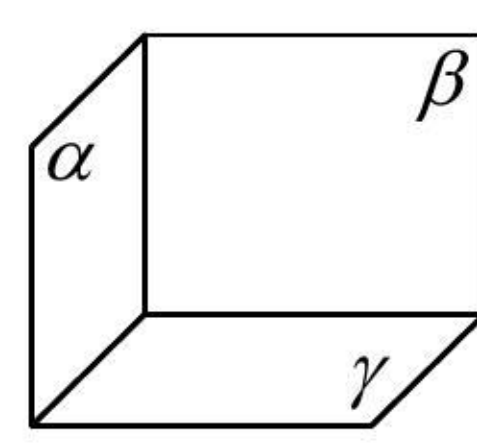


图3

《一数·高考数学核心方法》

【例2】(多选) 已知 m, n 是不同的直线， α, β 是不同的平面，则下列四个命题中正确的有（ ）

- (A) 若 $m // \alpha, m // \beta, \alpha \cap \beta = n$ ，则 $m // n$
(B) 若 $m // n, n \subset \alpha$ ，则 $m // \alpha$
(C) 若 $m \perp \alpha, n \perp \beta, m \perp n$ ，则 $\alpha \perp \beta$
(D) 若 $m \perp \alpha, m \perp n, \alpha // \beta$ ，则 $n // \beta$

解析：A项，如图1，可以想象A项是正确的，若要证明，用线面平行的性质定理即可，

在 α 内取不与 n 重合的直线 m' ，使 $m // m'$ ，则 $m' // \beta$ ，因为 $m' \subset \alpha, \alpha \cap \beta = n$ ，所以 $m' // n$ ，故 $m // n$ ；

B项，观察发现判定线面平行的条件不够，还差 $m \not\subset \alpha$ ，故B项错误，如图2；

C项，如图3，由图可知C项正确；

D项，有面面平行，可先画两个平行的平面，再往里面添线，如图4， n 可以在 β 内，故D项错误。

答案：AC

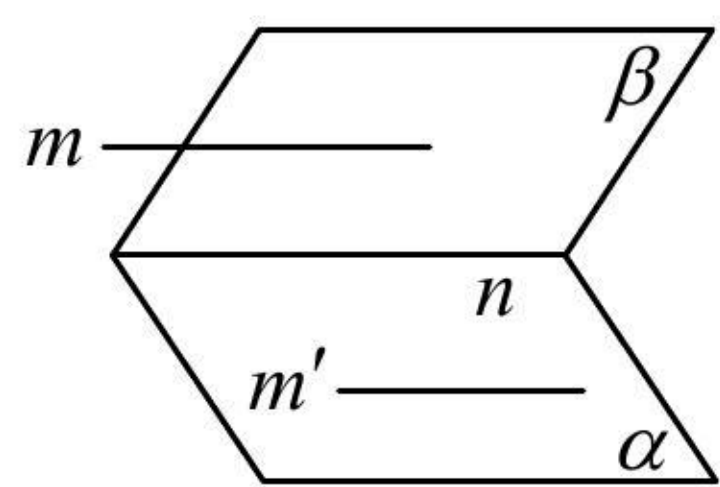


图1

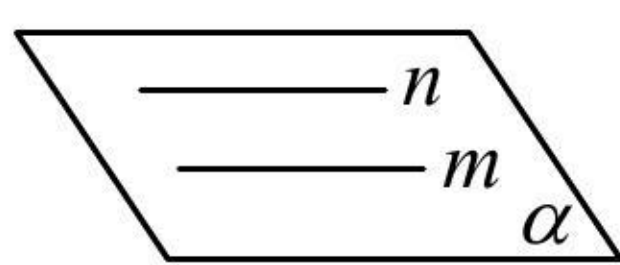


图2

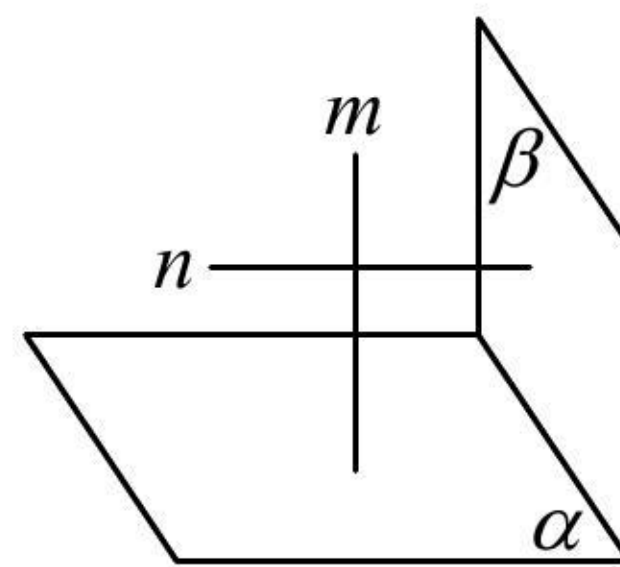


图3

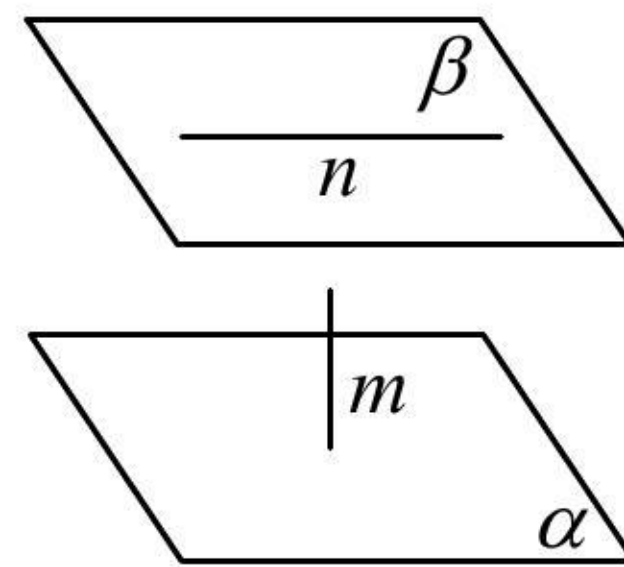


图4

【例 3】(多选) 已知 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则下列说法错误的是 ()

- (A) 若 $m \perp \alpha, \alpha \perp \beta$, 则 $m \parallel \beta$
- (B) 若 $m \parallel \alpha, \alpha \parallel \beta$, 则 $m \parallel \beta$
- (C) 若 $m \subset \alpha, n \subset \alpha, m \parallel \beta, n \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$
- (D) 若 $m \perp \alpha, m \perp \beta, n \perp \alpha$, 则 $n \perp \beta$

解析: A 项, 有面面关系 $\alpha \perp \beta$, 先画这两个面, 再画线 m , 如图 1, m 可以在 β 内, 故 A 项错误;

B 项, 有面面关系 $\alpha \parallel \beta$, 先画它们, 再由 $m \parallel \alpha$ 画 m , 如图 2, m 可以在 β 内, 故 B 项错误;

C 项, 没说 m, n 相交, 不能判定 $\alpha \parallel \beta$, 如图 3, 故 C 项错误;

D 项, 如图 4, D 项正确.

答案: ABC

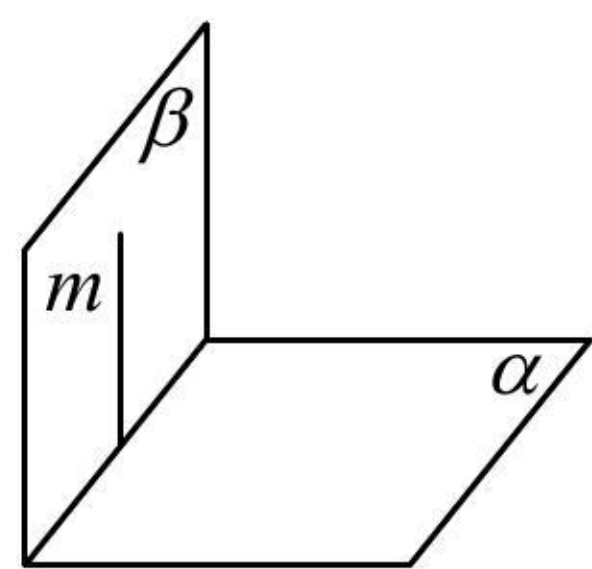


图1

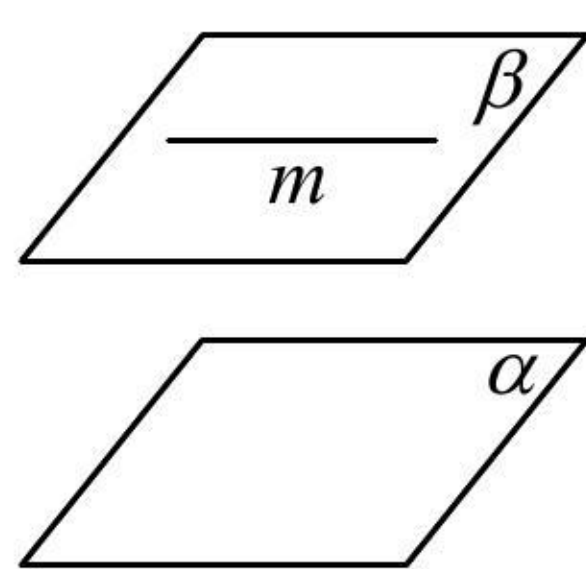


图2

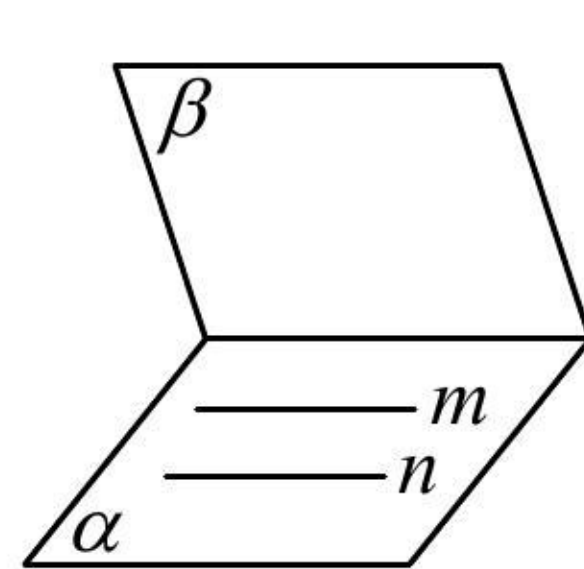


图3

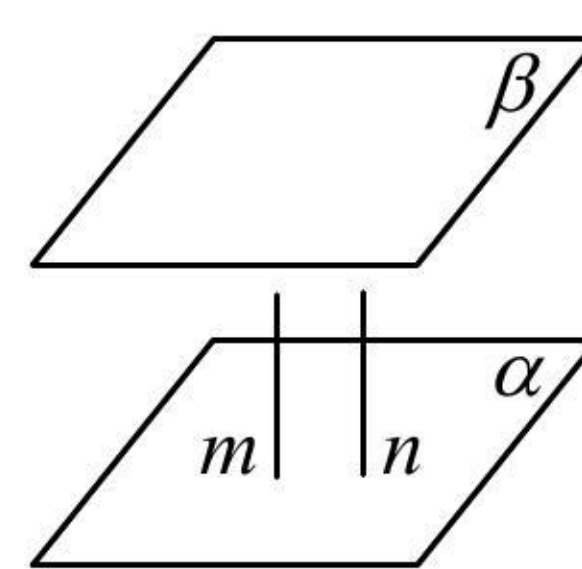


图4

【总结】可以发现, 此类题问法多种多样, 但我们总是画出草图辅助判断. 需注意: 想证明选项错误只需一个反例, 想说明正确则需要严格的论证, 这需要记准所有判定与性质定理.

强化训练

1. (2023·河北模拟·★★) (多选) 已知直线 a, b 和平面 α, β, γ , 下列选项能得到 $\alpha \perp \beta$ 的是 ()

- (A) $a \parallel \alpha, a \parallel \beta$
- (B) $\gamma \parallel \beta, \alpha \perp \gamma$
- (C) $\alpha \cap \beta = a, b \perp a, b \subset \beta$
- (D) $a \perp \beta, a \parallel \alpha$

2. (2023·全国模拟·★★★★) (多选) 已知 m, n 为异面直线, 直线 l 与 m, n 都垂直, 则下列说法正确的是 ()

- (A) 若 $l \perp$ 平面 α , 则 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$
- (B) 存在平面 α , 使 $l \perp \alpha, m \subset \alpha, n \parallel \alpha$
- (C) 有且仅有一对互相平行的平面 α 和 β , 其中 $m \subset \alpha, n \subset \beta$
- (D) 有且仅有一对互相垂直的平面 α 和 β , 其中 $m \subset \alpha, n \subset \beta$

3. (2023·四省联考·★★★★)(多选)已知平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = l$, B, D 是 l 上两点, 直线 $AB \subset \alpha$ 且 $AB \cap l = B$, 直线 $CD \subset \beta$ 且 $CD \cap l = D$, 下列结论中, 错误的有 ()

(A) 若 $AB \perp l$, $CD \perp l$, 且 $AB = CD$, 则 $ABCD$ 是平行四边形

(B) 若 M 是 AB 中点, N 是 CD 中点, 则 $MN \parallel AC$

(C) 若 $\alpha \perp \beta$, $AB \perp l$, $AC \perp l$, 则 CD 在 α 上的射影是 BD

(D) 直线 AB, CD 所成角的大小与二面角 $\alpha - l - \beta$ 的大小相等

答